האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

בחינה בלוגיקה מתימטית (1) (80423)
סמסטר הסתיו – תשס"א – מועד א'

המורים: פרופ' עזריאל לוי, פרופ' שהרן שלח הזמן: שעתיים

הבחינה מחולקת לשני חלקים. על התלמיד לענות על השאלה בחלק א' ועל שתי שאלות בחלק ב'. באותם מקרים בהם המינוח בשתי קבוצות ההרצאה היה שונה מובאים כאן המונחים ששימשו בכל אחת מן הקבוצות, היכן שאחד מהם מופיע בסוגריים.

חלק א': ענה על שאלה מס' 1

1. ענה בקצרה על השאלות א'-ד' הבאות. תשובה על כל אחת משאלות אלו צריכה להיות באורך של כחמש שורות לכל היותר.

א. הסבר מתי קבוצת ביטויים (מילים) היא כריעה. הבא, ללא הוכחה, דוגמה לקבוצה כריעה.

ב. הגדר מתי קבוצת פונקציות אמת (לוחות אמת) היא שלמה.

ג. מהם הסוגים השונים של הקבועים בתחשיב היחסים (תחשיב סימני היחס) ומהו מבנה מתאים לשפה בתחשיב זה?

ד. מהי מערכת היסק נאותה בתחשיב הפסוקים? הבא דוגמה למערכת כזאת.

חלק ב': ענה על שתים מבין השאלות 2 עד 4 הבאות.

תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות, אלא אם נאמר במפורש שאין צורך להוכיח. הקפד לצטט באופן מלא וברור את המשפטים בהם הנך משתמש. אם תענה על שלוש השאלות אז ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות.

2. תהי Γ קבוצת פסוקים עיקבית (ספיקה) בתחשיב היחסים (בתחשיב סימני היחס) שאף אחד מהם אינו מכיל את הקבוע האישי c, ויהי $\exists x\phi(x) \in \Gamma$. הוכח שגם הקבוצה $\Gamma \cup \{\phi(c)\}$ היא עיקבית (ספיקה), כאשר ש-$\phi(c)$ הוא תוצאת ההצבה של c עבור x ב-$\phi(x)$.

3. הוכח שמשפט הקומפקטיות אינו נכון לתחשיב היחסים (סימני היחס) מסדר שני.

4. תהי Γ קבוצת פסוקים עיקבית מקומית (ספיקה סופית) בתחשיב הפסוקים, כלומר קבוצת פסוקים שכל תת-קבוצה סופית שלה היא עיקבית (ספיקה). הוכח כי לכל פסוק ϕ לפחות אחת הקבוצות $\Gamma \cup \{\phi\}$ ו-$\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ היא עקבית מקומית (ספיקה סופית). אל תשתמש בהוכחה זאת במשפט הקומפקטיות.

בהצלחה!

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

בחינה בלוגיקה מתימטית (1) (80423)
סמסטר הסתיו – תשס"א – מועד ב'

המורים: פרופ' עזריאל לוי, פרופ' שהרן שלח הזמן: שעתיים

הבחינה מחולקת לשני חלקים. על התלמיד לענות על השאלה בחלק א' ועל שתי שאלות בחלק ב'. באותם מקרים בהם המינוח בשתי קבוצות ההרצאה היה שונה מובאים כאן המונחים ששימשו בכל אחת מן הקבוצות, היכן שאחד מהם מופיע בסוגריים.

חלק א': ענה על שאלה מס' 1

1. ענה בקצרה על השאלות א'-ד' הבאות. תשובה על כל אחת משאלות אלו צריכה להיות באורך של כחמש שורות לכל היותר.

א. הגדר מתי קבוצת ביטויים (מילים) היא כריעה חיובית. הבא, ללא הוכחה, דוגמה לקבוצה כריעה חיובית (כריעה למחצה) שאינה כריעה.

ב. נסח את משפט הקומפקטיות בתחשיבי הפסוקים והיחסים (וסימני היחס). הבא, ללא הוכחה, דוגמה לתחשיב בו משפט זה נכון ותחשיב בו משפט זה אינו נכון.

ג. תהי L שפה של תחשיב היחסים (סימני היחס) שאחד מקבועיה הוא קבוע יחס השיוויון $\approx$. תהי Γ קבוצת הפסוקים של L האמיתיים לוגית בתחשיב היחסים (סימני היחס) עם שוויון ו-Δ קבוצת הפסוקים של L האמיתיים לוגית בתחשיב היחסים (סימני היחס) ללא שוויון, כלומר בתחשיב בו $\approx$ אינו מתפרש בהכרח כזהות. (1) האם $\Gamma \subseteq \Delta$? (2) האם $\Delta \subseteq \Gamma$? לכל אחת משתי שאלות אלו, אם התשובה חיובית נמק זאת במשפט אחד, ואם היא שלילית הבא דוגמה נגדית והסבר במשפט אחד מדוע זאת דוגמה נגדית.

ד. מהי הוכחה של פסוק במערכת היסק (מערכת הוכחה) בתחשיב הפסוקים? (הנך רשאי להתי-יחס כאן למערכת היסק כללית או למערכת הוכחה מסויימת). כשידוע לנו שלפסוק יש הוכחה מה זה אומר על הפסוק מבחינה סמנטית (מבחינת המשמעות), ומהי הדרישה ממערכת ההיסק המאפשרת להגיע למסקנה זאת לגבי הפסוק.

חלק ב': ענה על שתים מבין השאלות 2 עד 4 הבאות.

תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות, אלא אם נאמר במפורש שאין צורך להוכיח. הקפד לצטט באופן מלא וברור את המשפטים בהם הנך משתמש. אם תענה על שלוש השאלות אז ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות.

2. לשאלה זאת יש שתי גירסאות שונות. התייחס בתשובתך לגירסה שהיא יותר ברורה לך, וציין מהי.

גירסה ראשונה. יהי $\mathcal{A}$ מבנה ו-$\sim$ יחס חפיפה על $\mathcal{A}$.
א. הגדר את מבנה המנה $\mathcal{A}/\sim$ של $\mathcal{A}$ מעל $\sim$. שים לב שכל רכיבי מבנה המנה יהיו מוגדרים היטב.
ב. אם סימן השיוויון $\approx$ מתפרש ב-$\mathcal{A}$ כיחס $\sim$ שהוא החפיפה כלומר $\sim=\approx^{\mathcal{A}}$, (ואז, אם $\sim$ אינו יחס הזהות, אז $\mathcal{A}$ הוא מבנה לתחשיב היחסים ללא שיוויון) אז $\approx$ מתפרש ב-$\mathcal{A}/\sim$ כיחס הזהות, כלומר היחס $\approx^{\mathcal{A}/\sim}$ הוא היחס $=_{A/\sim}$.

גירסה שנייה. א. יהי $\mathcal{A}$ מבנה בו סימן השיוויון מתפרש כיחס המקיים את אקסיומות השיוויון, אבל אינו בהרכח הזהות. באמצעות המבנה $\mathcal{A}$ הגדר מבנה $\mathcal{B}$ כך שב-$\mathcal{B}$ אמיתיים בדיוק אותם הפסוקים האמיתיים ב-$\mathcal{A}$ ו-$\mathcal{B}$ הוא מבנה תיקני לתחשיב סימני היחס, כלומר סימן השיוויון $\approx$ מתפרש ב-$\mathcal{B}$ כזהות.
ב. הוכח שסימן השיוויון מתפרש ב-$\mathcal{B}$ כזהות.

3. נסח והוכח את משפט השלמות מבחינת לוחות (פונקציות) אמת של תחשיב הפסוקים, כלומר המשפט המבטיח שהקשרים $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ מספיקים כדי להביע את כל מה שסביר להביע בתחשיב הפסוקים. אם הנך מוכיח משפט זה ממשפט אחר האומר אותו דבר בלבוש אחר אז הוכח גם את המשפט האחר.

4. א. הגדר בהגדרה רקורסיבית (באינדוקציה על הנוסחה) את תוצאת ההצבה $\phi(c)$ של קבוע אישי c עבור משתנה אישי בנוסחה ϕ של תחשיב היחסים (תחשיב סימני היחס) מסדר ראשון, שאנו מסמנים אותה גם כ-$\phi(x)$.
ב. הוכח את המקרה המתאים להצבה זאת של המשפט הסמנטי של ההצבה (המשפט על משמעות ההצבה), כלומר משפט הנותן את הערך של $\mathrm{val}(\mathcal{A}, s, \phi(c))$ באמצעות ערך מתאים של $\phi(x)$.

בהצלחה!